說明：

左側為民國 100 年台大轉學考插大微積分的考題(包括台大電機系、資工系、物理系、大氣科學系、地質系、土木系、機械系、化學系、材料系皆用這份考卷)，右側摘錄自本 DVD 函授課程的講義內容與左側的民國 100 年台大轉學考插大微積分的考題作對照。

一、填充題：每題 7 分

1.

試求極限 $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{\dfrac{\sqrt{1-t^3}}{t}+\dfrac{3}{2}}{t+2}=$____. [100.台大轉]

考題分析

本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

☞

範例 4.8-1

求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$. [92.政大資管]

老師開講

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

2.

試求定積分 $\int_0^9 \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx =$____. [100.台大轉]

考題分析

本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

練習

$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$. [93.台大商學]

answer

令 $y=\sqrt{x} \Rightarrow dy=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow 2ydy=dx$,

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=\int \sqrt{\frac{y^2}{1-y^3}}2ydy=2\int y^2\left(1-y^3\right)^{-\frac{1}{2}}dy=-\frac{4}{3}\left(1-y^3\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{4}{3}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$$

3.

設向量場$\vec{F}(x,y,z)=\left(2x+ye^{z}\right)\hat{i}+\left(e^{x}-ye^{z}\right)\hat{j}+\left(e^{z}+3z-xy\right)\hat{k}$, S 爲球面$x^2+y^2+z^2=9$，且$\hat{n}$爲其往外之法向量，試求面積分$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS=$__________. [100.台大轉]

考題分析

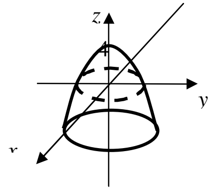
本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

練習

求向量場$\vec{F}=(x,y,z)$對封閉曲面S：$z=4-x^2-y^2$，其中$z\geq 0$，的流通量（flux）. [90.交大科管]

answer

最好先自己想像一下S的圖形大約長什麼樣子（ 像一頂圓帽子):



$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\int_R \vec{F}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(z+x^2+y^2-4\right)\right]dxdy=\int_R\left(2x^2+2y^2+z\right)dxdy$$

$$=\int_R\left(2x^2+2y^2+4-x^2-y^2\right)dxdy=\int_R\left(4+x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4+r^2\right)rdrd\theta=24\pi\ .$$

4.

過曲面 $z\sin x+z\cos y+3z^2+5z=7$ 上點 $(0,\pi,1)$ 之切平面為________________. [100.台大轉]

考題分析

本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

練習

圓錐面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, 求在圓錐面上一點 $P(1,0,2)$ 之切平面方程式 (tangent plane).

[93.北科大光電]

answer

此切平面的法向量為

$$\vec{\nabla}\left(z-2\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{(1,0,2)}=-\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\hat{i}-\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y\hat{j}+\hat{k}\Big|_{(1,0,2)}=-2\hat{i}+\hat{k},$$

$\therefore$ 切平面方程式為 $-2(x-1)+(z-2)=0.$

5.
設 K 爲 4 個平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所圍成的四面體，試求積分

$\iiint_K \frac{12}{(1+x+y+z)^4}\,dV=$_______. [100.台大轉]

考題分析

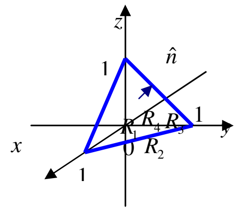
本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

☞

範例 14.4-1

Please verify the Gauss theorem for the volume shown on the figure for the vector $\vec{v}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+2z\,\hat{k}$.
[89.台大化工]

老師開講



(1) $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,d\tau=\int(1+1+2)\,d\tau=4\int d\tau=4\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-x-y}dzdxdy=4\int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)\,dxdy=\frac{2}{3}$.

(2) $\oint_S \vec{v}\cdot\hat{n}d\sigma=\int_{R_1}\vec{v}\cdot\hat{n}d\sigma\Big|_{y=0}+\int_{R_2}\vec{v}\cdot\hat{n}d\sigma\Big|_{z=0}+\int_{R_3}\vec{v}\cdot\hat{n}d\sigma\Big|_{x=0}+\int_{R_4}\vec{v}\cdot\hat{n}d\sigma$

$$\underbrace{=}_{\substack{\Delta ABC\text{的平面}\\ \text{方程爲 } z+x+y-1=0}} 0+0+0+\int_0^1\int_0^{-x+1}\left(x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+2z\,\hat{k}\right)\vec{\nabla}(x+y+z-1)\,dydx$$

$$=\int_0^1\int_0^{-x+1}(x+y+2z)\,dydx\underbrace{=}_{\because z=1-x-y}\int_0^1\int_0^{-x+1}(-x-y+2)\,dydx=\frac{2}{3}.$$

6.

試求級數$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\left(n^2+1\right)}{n!}$之和為____. [100.台大轉]

考題分析

本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

☞

範例 6.1.1-3

級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$之和為_____ . [95.台大財金]

老師開講

要訣：設法把級數化為等比級數。

(1) $A\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdots①$， $\frac{1}{2}A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n+1}}\cdots②$，

①減去②得$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow A=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdots$❶.

(2) $B\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdots③$， $\frac{B}{2}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\cdots④$，

③減去④得$\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow B=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdots$❷，

∴❷代入❶得$A=1+2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}=3+3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=6$.

7.

試求積分$\int_0^6\left[\int_0^{\sqrt{6x-x^2}} 6\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right]dx=$_______. [100.台大轉]

考題分析

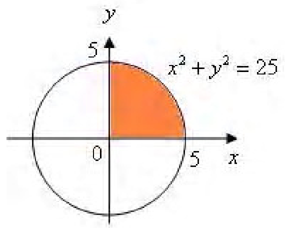
本講義類似題，利用本講義約可做出 7 分，請見右方本講義的內容：

範例 13.1-4

Convert $\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ to a double integral in polar coordinates and evaluate the integral.

[92.成大國企]

老師開講



$$\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 e^r\,rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 rde^r\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(re^r\Big|_0^5-\int_0^5 e^r dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(5e^5-e^5+1\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\left(4e^5+1\right).$$

二、計算題：每題 15 分

1.

試在 2 與 18 之間插入 3 個實數$2<x<y<z<18$使得$u=\dfrac{(x-2)(y-x)(z-y)(18-z)}{xyz}$之值最大。

[100.台大轉]

考題分析

非本講義類似題。

2.

設 D 爲心臟線 $r=2(1-\cos\theta)$ 所圍成的區域，且在 D 上的點 (x,y)，其密度函數爲

$\rho(x,y)=12\sqrt{x^2+y^2}$．試求其總質量(total mass)及質量中心(center of mass).　　[100.台大轉]

考題分析

本講義類似題，利用本講義約可做出 15 分，請見右方本講義的內容：

練習

Consider a half sphere defined by $x^2+y^2+z^2=R^2$ and $z\geq 0$, and let G be its center of gravity. Then, the coordinates of G is ___________.　　[96.中正企管]

answer

假設質心的座標是 (x_0,y_0,z_0)，由於對稱的關係，可知 $x_0=y_0=0$，

∴我們只需求 z_0：

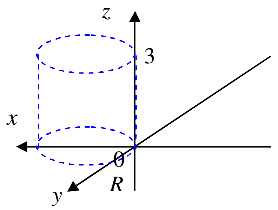
$$\frac{2\pi R^3}{3}z_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R zr^2\sin\theta drd\phi d\theta \Rightarrow \frac{2\pi R^3}{3}z_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\sin\theta\cos\theta drd\phi d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi R^3}{3}z_0=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\sin 2\theta drd\phi d\theta \Rightarrow \frac{2\pi R^3}{3}z_0=\frac{\pi R^4}{8}\Rightarrow z_0=\frac{3R}{16}.$$

範例 14-4

Evaluate the volume of the solid bounded by the cylinder $r=2\cos\theta$, the plane $z=3$, and the plane $z=0$.　　[97.台大應力類題]

老師開講



$$\underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^3 rdzdrd\theta}_{\text{注意！不能寫成}\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^r rdzdrd\theta,\ \because\text{當}\pi\geq\theta\geq\frac{\pi}{2}\text{時，}r\leq 0}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}3rdrd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\cos^2\theta d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=6\theta+3\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi.$$